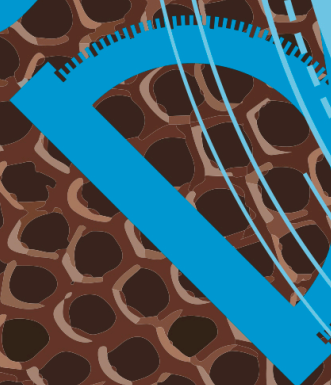
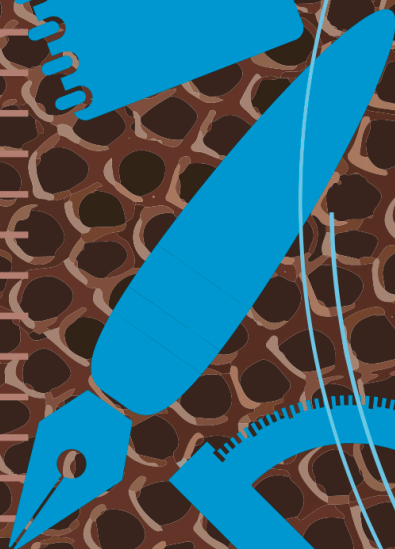


Formation et  
pratiques d'enseignement  
en questions



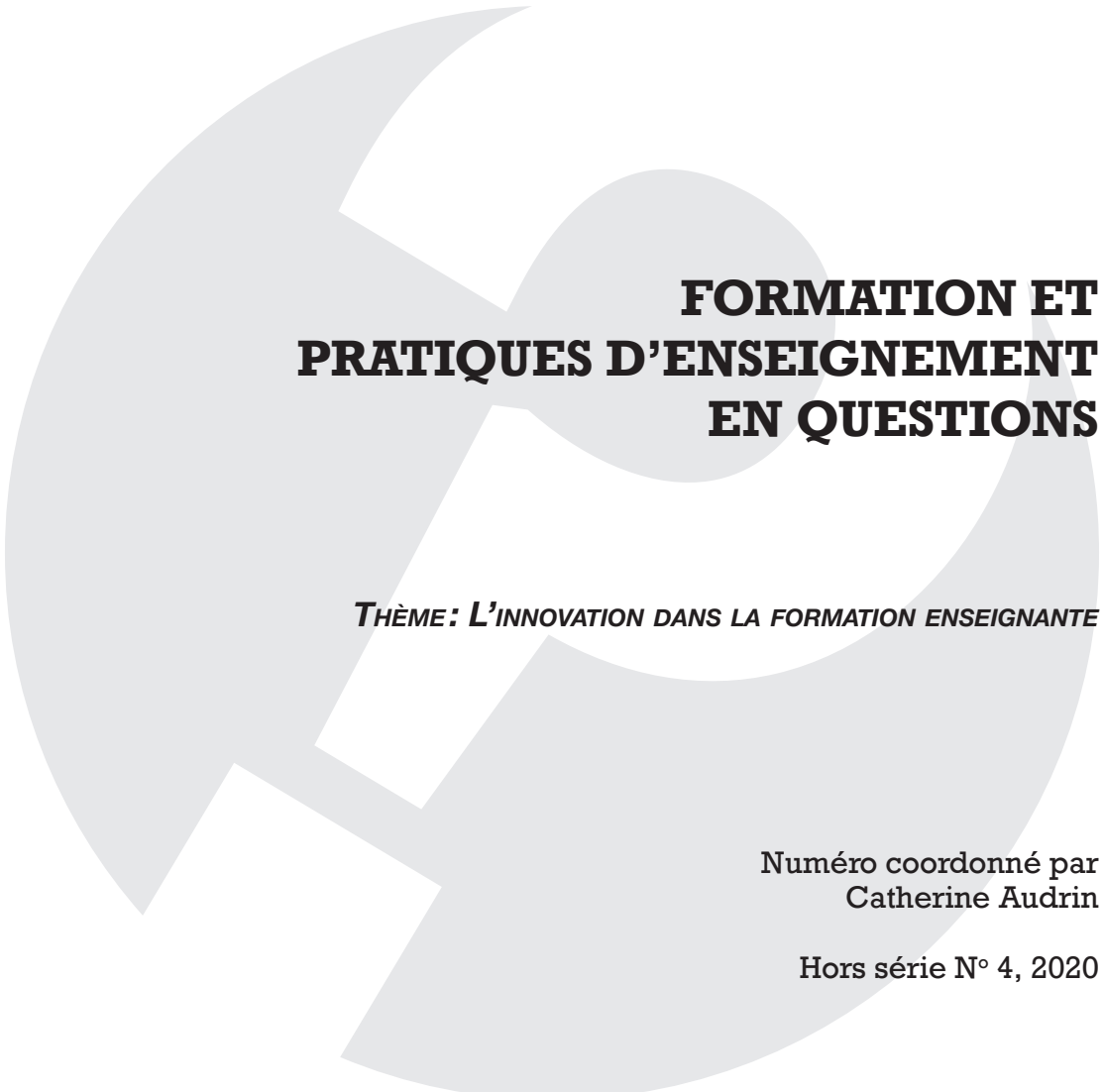
Revue des **HEP** et institutions assimilées de Suisse romande et du Tessin

# L'innovation dans la formation enseignante



Catherine Audrin

Hors-série N°4



# **FORMATION ET PRATIQUES D'ENSEIGNEMENT EN QUESTIONS**

***THÈME: L'INNOVATION DANS LA FORMATION ENSEIGNANTE***

Numéro coordonné par  
Catherine Audrin

Hors série N° 4, 2020

### **Comité de lecture**

Andreea Capitanescu Benetti, Université de Genève (Suisse)  
René Barioni, Haute école pédagogique du canton de Vaud (Suisse)  
Guillaume Bonvin, Haute école pédagogique du canton de Vaud (Suisse)  
Jean- Charles Caillez, Université Catholique de Lille (France)  
Isabelle Capron Puozzo, Haute école pédagogique du canton de Vaud (Suisse)  
Christine Chambris, Université de Cergy Pontoise (France)  
Zarina Charlesworth, Haute Ecole Arc (Suisse)  
Françoise Cros, Centre de Recherche sur la Formation et Conservatoire national des Arts  
et Métiers (France)  
Sonia Florey, Haute école pédagogique du canton de Vaud (Suisse)  
Bertrand Forclaz, Haute école pédagogique du canton de Fribourg (Suisse)  
Maud Lebreton-Reinhard, Haute école pédagogique du canton de Vaud (Suisse)  
Christelle Lison, Université de Sherbrooke (Belgique)  
Corinne Monney, Haute école pédagogique du canton de Vaud (Suisse)  
Eric Mounier, Université de Paris Est, Créteil (France)  
Daniele Perisset, Haute école pédagogique du Valais (Suisse)

Le contenu et la rédaction des articles n'engagent que la responsabilité de leurs auteurs.

© Conseil académique des hautes écoles romandes en charge de la formation des enseignant.e.s  
(CAHR)

ISSN 1660-9603

Secrétariat scientifique : Sarah Boschung  
Rédacteur responsable : Pierre-François Coen  
Conception graphique : Jean-Bernard Barras  
Mise en page : Marc-Olivier Schatz



## ***Thème : L'innovation dans la formation enseignante***

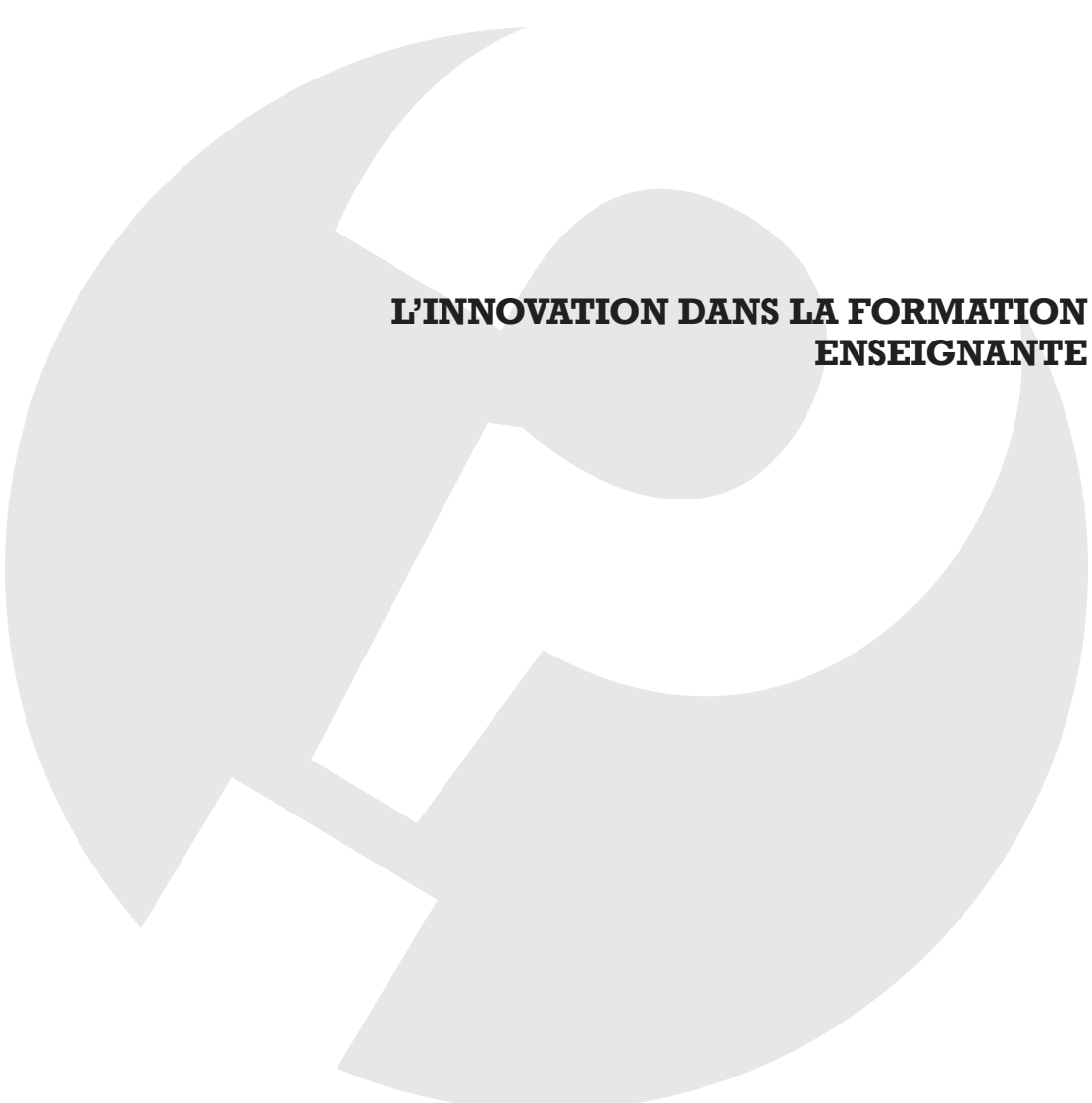
Numéro coordonné par  
Catherine Audrin

### **TABLE DES MATIERES**

|                                                                                                                                                                                                                                               |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>L'innovation dans la formation enseignante</i><br>Catherine Audrin                                                                                                                                                                         | 7   |
| <i>Le focus group comme innovation pour le soutien du stage en emploi</i><br>François Gremion, Giuseppe Melfi, Sheila Padiglia, Francesco Arcidiacono<br>et Antonio Iannaccone                                                                | 13  |
| <i>Détourner la plateforme Perusall pour transformer la forme scolaire/universitaire<br/>en articulant des temps de formation en présence et à distance ?</i><br>Nicolas Perrin, Laetitia Progin, David Piot et Guillaume Vanhulst            | 29  |
| <i>Innover en mathématiques en faisant manipuler plus de 150 étudiants pendant un cours</i><br>Valérie Batteau et Michel Deruaz                                                                                                               | 49  |
| <i>Deux approches de formation pour accompagner les étudiant·e·s<br/>dans la création de dispositifs pédagogiques</i><br>Alaric Kohler, Marcelo Giglio et Romain Boissonnade                                                                  | 75  |
| <i>Mettre à jour les savoirs en jeu dans une formation continue sur le tri de mots<br/>en grammaire, au service de l'innovation des pratiques professionnelles</i><br>Véronique Marmy Cusin                                                   | 89  |
| <i>Des dispositifs d'enseignement mi-finis pour permettre une coopération<br/>entre enseignant·e·s, chercheur·e·s, formateurs et formatrices</i><br>Alaric Kohler et Bernard Chabloz                                                          | 111 |
| <i>Créer des capsules sonores dans une démarche de réflexion citoyenne<br/>quand on est étudiant dans le cadre des cours de langue : une pratique innovante<br/>pour l'enseignement/apprentissage des langues ?</i><br>Françoise Berdal-Masuy | 129 |
| <i>Postures ou imposture ? Les accompagnateurs de stagiaires pensent<br/>former à l'autonomie mais qu'en est-il sur le terrain ?</i><br>Edmée Runtz-Christan                                                                                  | 143 |

### **VARIA**

|                                                                                                                                                                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>Les trajectoires d'insertion professionnelle des enseignants formés à l'étranger :<br/>de la précarité à la reconnaissance ?</i><br>Jeanne Rey, Richard Mettraux, Matthieu Bolay et Jacqueline Gremaud | 161 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|



## **L'INNOVATION DANS LA FORMATION ENSEIGNANTE**





## ***Innover en mathématiques en faisant manipuler plus de 150 étudiants pendant un cours***

**Valérie BATTEAU**<sup>1</sup> (Haute école pédagogique du canton de Vaud, Suisse) et **Michel DERUAZ**<sup>2</sup> (Haute école pédagogique du canton de Vaud, Suisse)

Cette contribution s'inscrit dans une démarche de recherche-action mise en œuvre depuis 2010 dans un module de didactique des mathématiques de la filière préscolaire-primaire de la HEP Vaud. Par ailleurs, la professionnalisation de l'université et l'augmentation du nombre de jeunes avec des motivations très différentes a souvent servi de détonateur à l'innovation dans l'enseignement supérieur. Dans notre cas, la création des HEP au début des années 2000 a changé la donne. Le cadre est devenu universitaire, mais pas nécessairement les étudiants. La plupart d'entre eux ne se destinent pas à de longues études, manquent d'autonomie et de méthodes de travail. Nous avons donc décidé de construire un nouveau dispositif de formation en tenant compte des spécificités de ces étudiants en nous inspirant de nos recherches sur l'enseignement de la multiplication. Ce dispositif entremêle une présentation à l'aide d'un diaporama, des manipulations effectuées par le formateur avec un abaque d'un nouveau type et des abaques en papier pour les étudiants. Ce dispositif est mis en œuvre lors de cours donnés en amphithéâtre en grand effectif et permet ainsi aux étudiants de travailler la numération et les opérations dans différents registres sémiotiques.

Mots-clés : Innovation, dispositif de formation, numération

### **Introduction**

Cet article présente un dispositif de formation mis en œuvre à partir de 2017 dans le cadre d'un module de didactique des mathématiques de la filière préscolaire-primaire de la Haute École Pédagogique du Canton de Vaud (HEP Vaud) à Lausanne (Deruaz & Clivaz, 2012). Nous montrons en quoi ce dispositif de formation peut être considéré comme une innovation pédagogique au sens de Bédard et Bécharde (2009) et de Cros (2009) et les effets potentiels de ce dispositif sur les résultats des étudiants à l'examen.

Ce dispositif de formation a été élaboré pour un cours donné à plus de 150 étudiants dont beaucoup d'entre eux ont un rapport compliqué aux mathématiques. Tout en prenant en compte ce contexte, l'objectif du dispositif est d'une part de rendre les étudiants actifs pendant les cours et d'autre part de leur proposer des manipulations afin de mieux comprendre les systèmes de numération et leurs liens avec les algorithmes des opérations.

---

1. Contact : valerie.batteau@hepl.ch

2. Contact : michel.deruaz@hepl.ch



Cet article présente en particulier le contenu mathématique proposé aux étudiants sur les systèmes de numération et sur la multiplication et ses algorithmes. Puis, nous donnons des éléments du déroulement du cours avant et pendant le nouveau dispositif, en précisant les tâches proposées aux étudiants. Nous concluons cet article par des effets potentiels du nouveau dispositif de formation sur l'amélioration des résultats des étudiants à l'examen, mais aussi sur leur rapport aux mathématiques. Nous terminons par quelques limites de la recherche ainsi que des perspectives de transposition dans des classes d'école primaire et en recherche.

### Innovation pédagogique

Dans le champ des sciences de l'éducation, le terme d'innovation est lié à l'idée d'un changement. Lison, Bédard, Beaucher et Trudelle (2014) précisent que «si toute innovation constitue un changement, tout changement n'est pas une innovation» (p. 2). Le terme d'innovation signifie introduire une chose nouvelle dans un contexte existant (Lison *et al.*, 2014). En se situant dans le contexte de l'enseignement supérieur, l'innovation pédagogique concerne tout ce qui ne relève pas d'un enseignement magistral ou frontal (Bécharde, 2001) dans lequel l'enseignant déroule son cours face à un auditoire d'étudiants peu propice aux interactions. Une innovation pédagogique constitue donc un changement par rapport à un enseignement de type magistral ou frontal. Et ce changement a pour finalité l'amélioration des apprentissages des étudiants (Bédard & Bécharde, 2009). Cros (2000) résume ces différentes idées : «l'innovation en formation est basée sur un nouveau relatif et contextualisé; elle est changement selon une action finalisée qui s'inscrit dans un processus» (p. 48). D'autres auteurs (Lison *et al.*, 2014) insistent sur l'idée de processus : l'innovation pédagogique «constitue un processus circulaire, limité dans le temps (préparation de l'innovation, mise en place, déroulement, évaluation – souhaitable – et «fin») et récurrent» (p. 11). Dans la figure ci-après, ces auteurs ont développé un modèle de la dynamique innovationnelle dans lequel l'innovation pédagogique ou curriculaire est représentée de manière circulaire avec les acteurs (professeurs, étudiants). Ils précisent que l'innovation en tant que processus se place aussi dans un contexte et une culture qui sont déterminants pour son implémentation. «Tout comme il y a une culture d'entreprise ou une culture d'école ou d'établissement, il y a une culture de l'innovation, liée à la structure de l'organisation elle-même» (p. 11). Dans ce modèle, l'innovation dépend de trois dimensions :

- Une dimension organisationnelle «qui concerne les méthodes de travail à l'intérieur d'une entreprise ou d'une institution» (p. 13)
- Une dimension technique «où un objet matériel nouveau est produit et où on s'intéresse, du moins en partie, à sa socialisation. Notons que ce type d'innovation a des répercussions sur les modes de vie, les représentations, les comportements et les attitudes des individus» (p. 13)
- Une dimension sociale définie comme «une remise en question des rapports sociaux existants qui apporte de nouvelles manières de voir, de sentir, d'agir, et qui se caractérise par son aspect collectif» (p. 13). L'institution n'entre pas en jeu dans les rapports sociaux entre les différents acteurs (professeurs, étudiants).

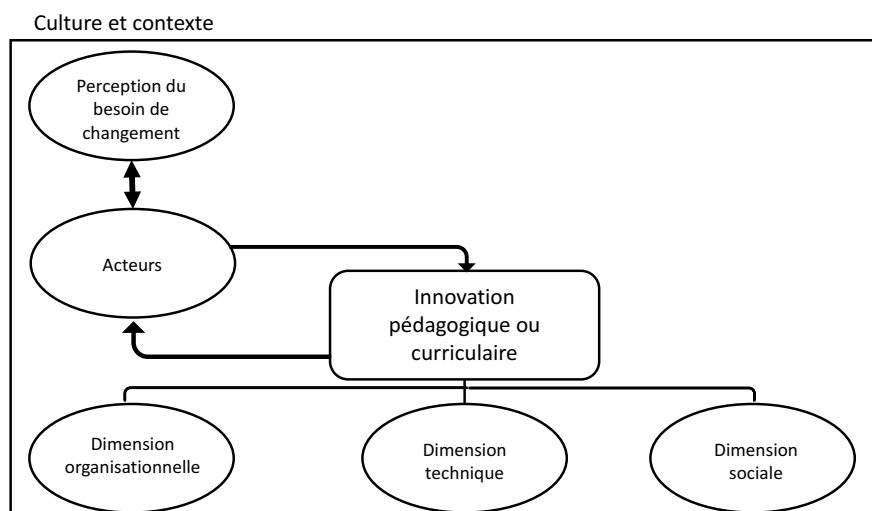


Figure 1 : Dynamique innovationnelle en enseignement supérieur (Lison *et al.*, 2014, p. 11)

Bédard et Raucent (2015) ont mis en évidence trois enjeux liés à l'innovation pédagogique dans l'enseignement supérieur :

- Le premier concerne les conditions qui vont favoriser et faciliter l'acceptation du changement ou celles qui vont inhiber l'innovation. Pour favoriser l'innovation, il est nécessaire de préciser les valeurs et la vision portées par ce changement. Il faut de plus prendre en compte les contextes académique, administratif et politique dans lesquels le changement s'inscrit.
- Le deuxième est l'existence de zones de tensions créées par les changements.
- Le troisième concerne la pérennité des innovations pédagogiques, car toute innovation pédagogique peut se heurter à des résistances qui peuvent provenir tant des personnes que des structures.

Pour résumer, l'innovation pédagogique dans l'enseignement supérieur signifie un changement par rapport à un enseignement de type magistral ou frontal. L'innovation représente à la fois un produit (réussite des étudiants et réputation de l'institution) et un processus (engagement et persévérance des étudiants) (Lison *et al.*, 2014, p. 14). Elle peut amener des résistances tant des personnes que des structures. Nous allons maintenant présenter le contexte dans lequel le dispositif de formation a été introduit.

### Contexte de la formation

À la HEP Vaud, la formation au métier d'enseignant à l'école primaire compte six semestres et permet d'obtenir un bachelor (licence). Deux modules obligatoires concernent plus spécifiquement les mathématiques : le premier au deuxième semestre et le second au cinquième semestre. Cela correspond à un volume de 78 heures de formation ou 12 crédits ECTS (une moitié sous la forme d'un cours en grands effectifs, jusqu'à 150 étudiants et l'autre sous la forme de séminaires comportant entre 20 et 30 étudiants). Pour accéder à





cette formation, il est nécessaire d'avoir obtenu une maturité fédérale (baccalauréat) ou un titre jugé équivalent. La plupart des étudiants n'ont donc pas suivi de formations universitaires préalables à cette formation d'enseignant.

Plus généralement, les HEP ont été créées au début des années 2000 pour remplacer les Écoles Normales avec pour objectif l'universitarisation de la formation des enseignants. Il faut toutefois signaler que le profil des étudiants n'a lui pas nécessairement changé. Selon Cros (2009), la professionnalisation de l'université et l'augmentation du nombre de jeunes avec des motivations très différentes a souvent servi de détonateur à l'innovation dans l'enseignement supérieur. L'équipe en charge du module du deuxième semestre a tenté de construire un cours en tenant compte des spécificités de ces étudiants qui, pour la plupart, ne disposent que de leurs connaissances mathématiques acquises en tant qu'élève du secondaire et qui, pour beaucoup, ont un rapport compliqué aux mathématiques.

Ainsi, un cours de savoirs disciplinaires en mathématiques et didactique des mathématiques a été mis en place en s'inspirant des travaux sur les Connaissances Mathématiques initiés par Shulman (1986), puis développés par Ball, Thames et Phelps (2008) et repris dans le contexte de la multiplication par Clivaz (2014). Dans les travaux de Ball et de ses collègues (2008), les Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement sont catégorisées en connaissances du sujet mathématique et en connaissances pédagogiques.

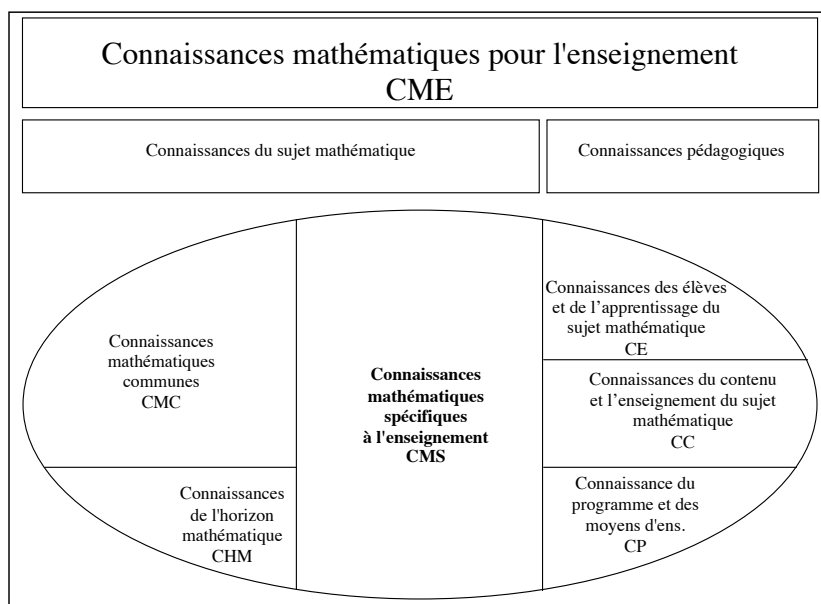


Figure 2: Connaissances mathématiques pour l'enseignement (Ball *et al.*, 2008, p. 403) traduit dans (Clivaz, 2014)

Cette figure est présentée aux étudiants lors du cours pour justifier la présence d'un cours de savoirs disciplinaires dans leur formation d'enseignant. En effet, certains étudiants, souvent ceux qui ont une mauvaise relation avec les mathématiques, ne comprennent pas, ou ne veulent pas comprendre,



pourquoi ils seront encore évalués sur des connaissances mathématiques et pas uniquement sur des connaissances didactiques ou méthodologiques comme cela pouvait être le cas du temps des Écoles Normales.

Ce cours propose quatre chapitres de mathématiques : la logique et les ensembles, les différentes numérations orales et écrites chiffrées dans différentes bases, les opérations et les algorithmes en lien avec ces opérations (Deruaz & Clivaz, 2012). Le dispositif décrit dans ce texte concerne plus spécifiquement la partie relative aux différentes numérations et aux algorithmes de la multiplication.

### **Problématique de la recherche**

De 2010 à 2016, avant la mise en place du nouveau dispositif, nous avons proposé ce cours aux étudiants et les retours reçus tant de la part des étudiants que de l'institution étaient positifs. Toutefois, après quelques années, les formateurs ont fait un double constat : d'une part les étudiants n'étaient pas suffisamment sollicités pendant les cours et d'autre part une partie d'entre eux se contentaient d'appliquer des procédures mémorisées sans chercher à les comprendre et sans chercher à articuler entre elles les connaissances travaillées. Ce constat a conduit les formateurs à remettre en question la partie du cours sur la numération et les outils de calculs écrits, mais sans renoncer à leurs contenus et en particulier au travail avec d'autres bases que la base dix. Pour cela, un nouveau dispositif de formation qui intègre un certain nombre de manipulations avec du matériel spécifiquement conçu a été construit au printemps 2017. Ce nouveau dispositif prend en compte d'une part le format de la formation (cours dispensé en grand effectif et rapport compliqué aux mathématiques) pour permettre aux étudiants d'adopter une posture active en cours. D'autre part, ce dispositif relève de choix didactiques (proposer des manipulations pour travailler sur les différentes représentations du nombre) afin de permettre aux étudiants de comprendre les systèmes de numérations orales et écrites chiffrées et leurs liens avec les algorithmes des opérations, pour ensuite pouvoir mieux les enseigner.

Les questions de recherche portent sur le nouveau dispositif de formation : en quoi ce dispositif correspond-t-il à une innovation pédagogique ? Quels sont les impacts pour les étudiants de la mise en œuvre de ce dispositif de formation ?

### **Quelques éléments de méthodologie**

Nous décrivons le dispositif de formation en 2016, puis le nouveau dispositif mis en œuvre à partir de 2017. Les examens de 2016 et 2017 sont identiques avec le même seuil de réussite. D'un point de vue institutionnel, il n'y a pas eu de changement au niveau de la formation globale proposée aux étudiants, ni sur les conditions d'admission. Les profils des étudiants en 2016 et 2017 sont similaires. Pour pouvoir mesurer un impact de l'innovation pédagogique, nous retenons comme indicateur le taux de réussite des étudiants à l'examen de ce module lors de la première session de l'examen en 2016 et 2017.



## Contenu mathématique des cours de 2016 et 2017

Pour justifier les choix qui ont été faits dans le nouveau dispositif, nous présentons d'abord les enjeux didactiques liés à l'enseignement des numérations, des opérations et de leurs algorithmes.

L'enseignement des différentes numérations est un enjeu prioritaire de l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. Celui-ci est d'une part vu comme un préalable à l'enseignement des opérations et algorithmes, et d'autre part est détaché de l'enseignement des opérations et algorithmes (Bednarz & Janvier, 1984).

L'étude de l'évolution historique de la numération nous révèle combien représenter un nombre et calculer ne font qu'un, la survie d'un système et son évolution étant étroitement liées à son efficacité calculatoire. Or, ce lien est pauvrement perçu dans l'enseignement primaire. (p. 26).

Bednarz et Janvier (1984) mentionnent un manque de liens entre l'enseignement des numérations et celui des opérations et de leurs algorithmes. Par son importance dans les curriculums, par les difficultés tant du côté enseignement (Batteau & Clivaz, 2016) qu'apprentissage, les différentes numérations demeurent un sujet de recherche en didactique des mathématiques dont les travaux de Bednarz et Janvier (1984) restent une référence. De plus, d'autres recherches sur l'enseignement de la multiplication (Clivaz & Deruaz, 2013) ont été prises en compte pour l'élaboration du cours. Le cours sur les numérations s'appuie sur un développement du modèle du triple code (Dehaene, 1992, p. 31) que nous exposons dans cet article. Ce développement s'inscrit dans une autre lignée que ceux apportés dans les travaux français actuels, en particulier (Chambris, 2018; Houdement & Tempier, 2018; Tempier & Chambris, 2017), mais nous faisons des liens entre ces différents développements.

Ce module vise ainsi à permettre aux étudiants de mieux comprendre les liens entre les différentes numérations orales et écrites chiffrées et les opérations et leurs algorithmes, pour ensuite pouvoir mieux les enseigner.

Nous présentons une partie du cours donnée aux étudiants sur les différentes numérations. N'importe quel nombre entier peut être associé au cardinal d'un ensemble ou d'une collection d'objets. Par exemple, le nombre seize est associé à n'importe quel ensemble de seize objets. Il peut ainsi être représenté de manière décontextualisée par une collection de seize points :



À la suite de Dehaene (1992), on parle de «représentation analogique» du nombre. Dans les lignes qui précèdent, une autre représentation de ce nombre a déjà été utilisée plusieurs fois lorsqu'il a été écrit, lu ou dit, «seize». Dehaene appelle cette représentation «auditive-verbale». C'est en effet celle qui est utilisée dans le langage parlé, celle que l'on dit ou que l'on entend, même si le nombre est écrit 16. Lorsque 16 est écrit avec des chiffres, une troisième représentation du nombre apparaît. Elle utilise le fait



que l'on peut mettre en évidence un groupement de dix des seize éléments de la collection pour en faire un groupe de dix et laisser six éléments isolés comme dans la figure ci-dessous :



Cette représentation à l'aide de chiffres est appelée représentation symbolique décimale ou en base dix. L'adaptation du modèle du triple code (Dehaene, 1992, p. 31) réalisée dans le cadre du cours permet de visualiser en un seul schéma ces trois représentations du nombre .

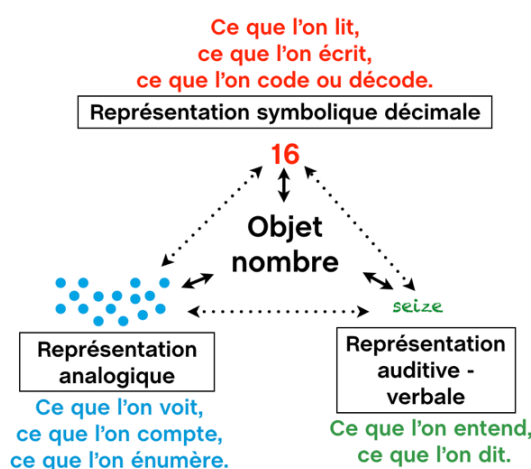


Figure 3 : Représentations du nombre adapté du modèle du triple code (Dehaene, 1992, p. 31)

Bien que ce modèle du triple code (Dehaene, 1992, p. 31) s'inscrive dans une perspective de neurosciences, nous choisissons de conserver les termes de représentations analogique, symbolique et auditive-verbale dans le cadre de notre cours. En effet, nous postulons que ces différentes représentations du nombre permettent aux étudiants de comprendre la construction des systèmes de numération orale et écrite chiffrée. De fait, un système de numération est un système pour représenter les nombres, mais pas seulement : « A numeration system is a system for representing numbers. Such systems are also needed for computation » (Chambris, 2018). Nous présentons comme tel aux étudiants que ces différentes représentations réfèrent au système de numération écrite chiffrée (pour la représentation symbolique décimale) et au système de numération orale (pour la représentation auditive-verbale). En revanche, la représentation analogique ne constitue pas un système de numération, car cette représentation ne permet pas d'opérer de manière satisfaisante sur des grands nombres par exemple. Houdement et Tempier (2018) ont également adapté le modèle du triple code (Dehaene, 1992, p. 31) en mettant la quantité (collection) au centre du modèle (Figure 4), le nombre parlé (cent vingt-trois), le nombre écrit (123) et les nombres en unités de numération (1C 2D 3U, 12D 3U, 123U...).

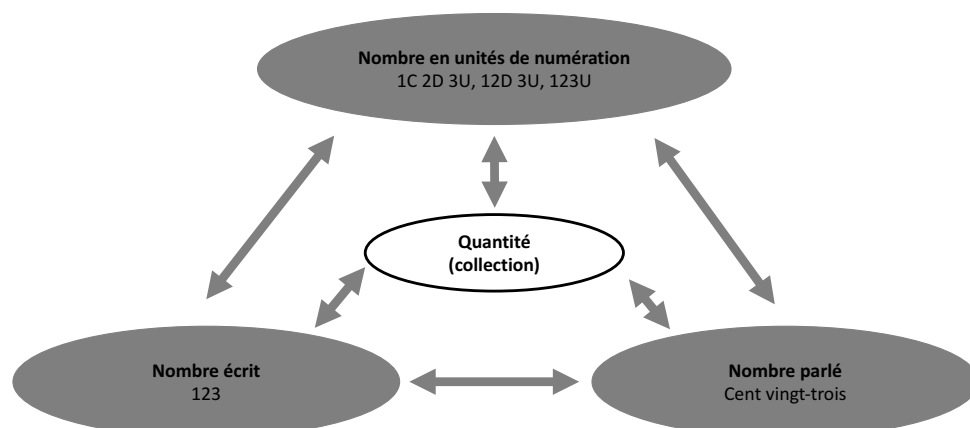


Figure 4 : Trois systèmes pour représenter les nombres, traduits de (Houdement & Tempier, 2018, p. 28)

Ce modèle (Figure 4) repose sur l'hypothèse de l'usage des unités de numération comme point d'appui pour une meilleure compréhension de la numération (Tempier & Chambris, 2017). Tempier (2016) a proposé un modèle qui repose sur trois représentations du nombre (nombre écrit en chiffres, collection groupée, nombre parlé ou écrit) et qui rend compte des savoirs en jeu qui accompagnent le passage par les unités de numération, ainsi que les types de tâches en jeu.

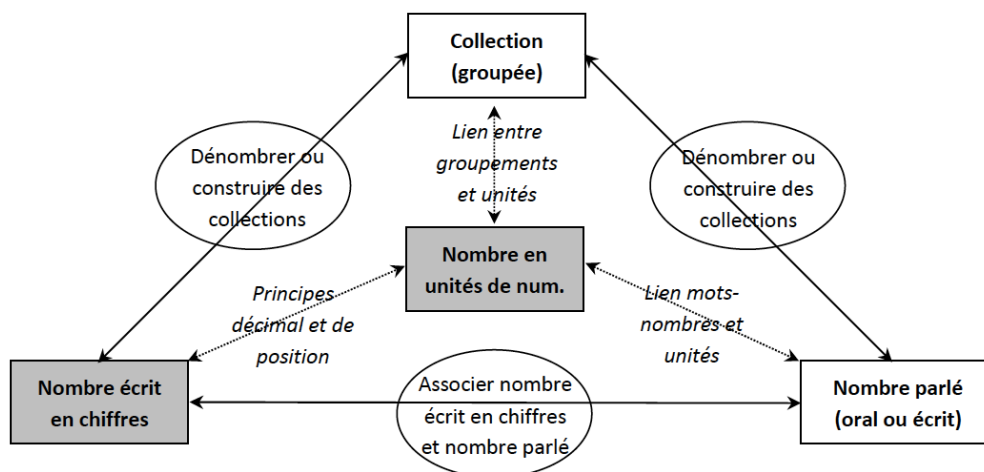


Figure 5 : Liens entre collection, nombre écrit en chiffres, nombre parlé et unités (Tempier, 2016, p. 72)

Pour résumer, notre modèle (Figure 3) porte sur des représentations et ne s'appuie pas explicitement sur les nombres en unités de numération et pour rendre compte des savoirs de la numération en jeu, nous avons mis en évidence des représentations intermédiaires entre les représentations analogique et symbolique.

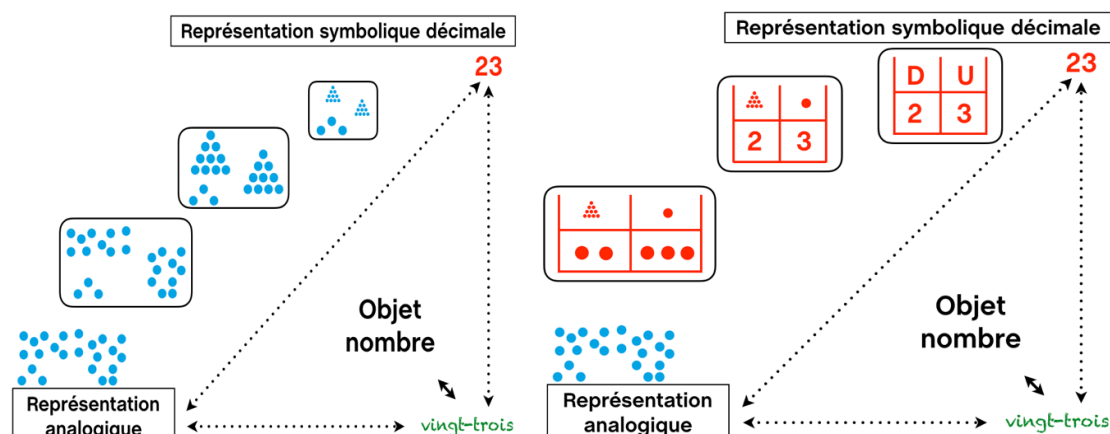


Figure 6 :

Représentations intermédiaires  
iconiquesReprésentations intermédiaires  
symboliques

Dans ces représentations intermédiaires (Figure 6), nous introduisons des symboles iconiques qui pourraient être rapprochés des nombres en unités de numération. Ces représentations intermédiaires nous permettent de faire les liens avec les savoirs de la numération en jeu. Ces représentations intermédiaires peuvent être classées en deux catégories : la première contient les représentations que l'on qualifiera d'iconiques puisque les points sont encore présents, la seconde contient celles que l'on qualifiera de symboliques et qui font intervenir l'aspect positionnel de l'écriture symbolique décimale du nombre.

Pour contraindre les étudiants à faire un pas de côté face à la numération décimale, nous avons décidé de les confronter à la numération dans d'autres bases que la base dix, en effectuant, par exemple en base cinq, des groupements par cinq. Pendant ce cours, le formateur explicite ces choix de formation, tout en alertant les étudiants dès le début sur le fait qu'il n'est pas recommandé de reproduire cet enseignement dans leurs classes avec leurs élèves d'école primaire.

Par exemple pour le nombre seize, en effectuant des groupements par cinq comme dans le schéma ci-dessous, on obtient trois groupes de cinq et un élément isolé :

La représentation symbolique en base cinq permettra de noter ce nombre 31. Pour éviter toute ambiguïté la base utilisée sera précisée en indice pour obtenir la notation  $31_{\text{cinq}}$  qui sera lue «trois, un en base cinq».



| $G^{\text{un}}$ | U |
|-----------------|---|
| 3               | 1 |





Pour être complet, il faut ajouter que, comme pour la base dix, avant d’écrire un nombre avec la représentation symbolique, il faut toujours effectuer le maximum de groupements possibles. Par exemple, en base cinq, il est proscrit d’effectuer avec seize objets que deux groupements de cinq en laissant six objets isolés pour écrire  $26_{\text{cinq}}$ . Nous choisissons d’utiliser les chiffres de 0 à 9 de la base dix pour écrire les représentations symboliques des nombres des autres bases. Ce choix a pour conséquence que le nombre  $26_{\text{cinq}}$  est proscrit bien qu’envisageable, ce qui n’est pas le cas pour la base dix car on ne dispose que des chiffres de 0 à 9.



La raison repose sur la nécessité du principe de non redondance d’un système de numération comme le précise Mounier (2012) pour la numération orale. Dans notre exemple, si cela était accepté, le nombre seize pourrait être écrit de deux manières différentes avec la même représentation symbolique en base cinq:  $31_{\text{cinq}}$  ou  $26_{\text{cinq}}$ , ce qui poserait assez rapidement des problèmes, par exemple pour comparer des nombres entre eux. Mounier (2012) a identifié deux autres principes pour la numération orale: celle-ci doit être non ambiguë (un même representamen oral ne peut désigner deux nombres différents) et exhaustive (tous les nombres entiers peuvent y être désignés, *a minima* jusqu’à une certaine borne).

Le principe de non redondance a pour conséquence que pour écrire un nombre en base cinq, seuls les chiffres 0, 1, 2, 3 et 4, soit cinq chiffres, sont utilisés. Le nombre de chiffres nécessaires pour écrire un nombre correspond au nombre par lequel on regroupe, donc à la base utilisée. Le tableau 1 montre comment les nombres de zéro à treize peuvent être écrits en base cinq.

Tableau 1 : Les nombres en base cinq

| Représentation analogique | Représentation auditive - verbale | Représentation symbolique en base cinq |
|---------------------------|-----------------------------------|----------------------------------------|
|                           | zéro                              | 0                                      |
| ●                         | un                                | 1                                      |
| ●●                        | deux                              | 2                                      |
| ●●●                       | trois                             | 3                                      |
| ●●●●                      | quatre                            | 4                                      |
| ○○○○○                     | cinq                              | 10                                     |
| ○○○○○●                    | six                               | 11                                     |
| ○○○○○●●                   | sept                              | 12                                     |
| ○○○○○●●●                  | huit                              | 13                                     |
| ○○○○○●●●●                 | neuf                              | 14                                     |
| ○○○○○<br>○○○○○            | dix                               | 20                                     |
| ○○○○○●<br>○○○○○           | onze                              | 21                                     |
| ○○○○○●●<br>○○○○○          | douze                             | 22                                     |
| ○○○○○●●●<br>○○○○○         | treize                            | 23                                     |



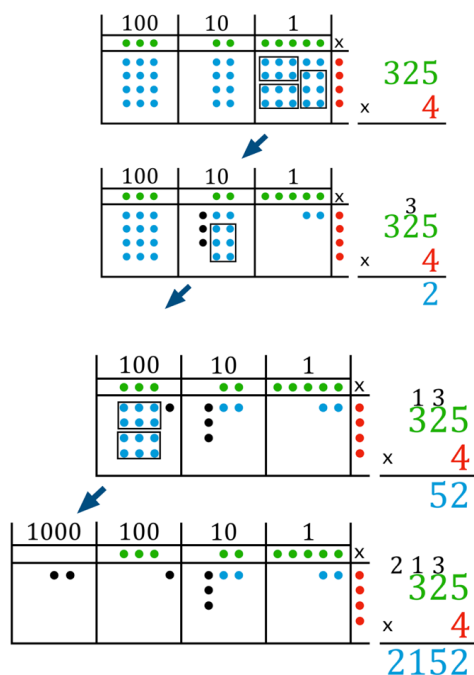


Figure 8 : Comment effectuer la multiplication

En procédant ainsi, l'importance de la base apparaît au moment des groupements par six qui correspondent aux retenues. Si cette multiplication est effectuée sans utiliser la représentation intermédiaire symbolique (Figure 6), il faut utiliser le répertoire mémorisé pour effectuer les multiplications intermédiaires. Par exemple : *quatre fois cinq est égal à vingt* puis il faut effectuer une décomposition additive en base six : *vingt est égal à trois fois six plus deux* avant d'écrire le 2 du résultat et le 3 en retenue. Ainsi, cette décomposition de l'algorithme en base six permet aux étudiants d'identifier ce qu'ils font sans s'en rendre compte pour effectuer l'algorithme de la multiplication en base dix. En particulier, cela leur permet de mettre en évidence l'intérêt de la connaissance des livrets (tables de multiplication), mais aussi de faire le lien entre ces livrets et leur utilisation dans les algorithmes posés de la multiplication, et donc de faire le lien entre la représentation auditive-verbale (par exemple en base dix : *trois fois quatre est égal à douze*) et la représentation symbolique (12) qui correspond à une dizaine et deux unités en base dix.

### Présentation du cours précédant le nouveau dispositif

Lors des premières occurrences de ce module, de 2010 à 2016, le cours en grand effectif était donné de manière essentiellement magistrale en utilisant toutefois des outils technologiques (Deruaz, 2015; Deruaz & Bünzli, 2015). La Figure 9, extraite d'une diapositive du cours de 2016, montre comment le nombre que l'on dit *deux cent trente-neuf* en auditif-verbal s'écrit en représentation symbolique en base six. Plusieurs représentations intermédiaires sont présentes avec une représentation intermédiaire iconique dans la partie gauche de la figure et une représentation intermédiaire symbolique dans la partie droite.

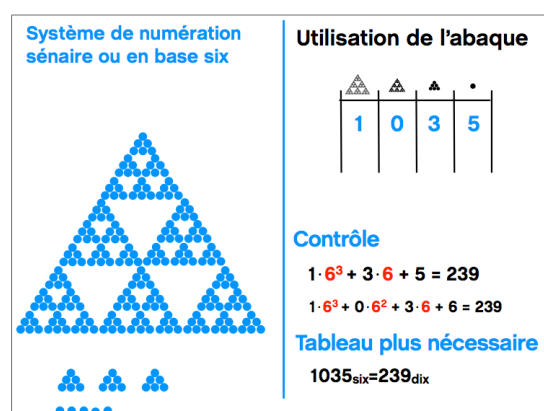


Figure 9 : Extrait du cours 2016

Le tableau ci-dessous détaille les cours donnés en 2016 ainsi que les tâches et sondages proposés aux étudiants pendant les cours. Ce tableau illustre le fait que les étudiants étaient assez peu sollicités pendant les cours. Nous précisons toutefois que chaque chapitre comporte un (ou des) pré-test(s) et post-test(s) et une fiche d'exercices.

Tableau 2 : Déroulement du cours de 2016 précédant le nouveau dispositif

| Cours (2016) | Ce que propose le formateur                                                                                                                                                                                 | Tâches et sondages proposés aux étudiants pendant les cours                                                                                                                                 |
|--------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4            | Représentation du nombre, ordinal, cardinal, subitizing, chaîne numérique                                                                                                                                   | Reconnaître l'aspect ordinal ou cardinal<br>Expériences de subitizing                                                                                                                       |
| 5            | Numération en base dix et dans d'autres bases (avec des tableaux de nombres)<br>Passage de l'écriture d'un nombre en base dix à une autre base et inversement                                               |                                                                                                                                                                                             |
| 6            | Suite du cours 5<br>Partie historique sur les systèmes de numération<br>Règles d'échanges<br>Multiplication par trois (10) en base trois                                                                    | Sondage : « On apprend aux enfants que lorsque l'on multiplie un nombre entier par 10, il suffit d'ajouter un zéro à droite du nombre. Ce résultat est-il valable dans les autres bases ? » |
| 7            | $2222 + 1$ en base trois<br>Représentations du nombre<br>Fractions<br>Mathématiques et musique en lien avec les fractions<br>Nombres rationnels                                                             | Sondage : « En base trois, quel nombre obtenons-nous lorsque l'on ajoute une unité au plus grand nombre à quatre chiffres ? »                                                               |
| 8            | Autre chapitre                                                                                                                                                                                              |                                                                                                                                                                                             |
| 9            | 2. Représentations des opérations<br>3. Liens entre représentations des opérations et problèmes additifs et multiplicatifs                                                                                  | 1. Dessiner une soustraction et une multiplication<br>3. Inventer des problèmes additifs et multiplicatifs                                                                                  |
| 10           | Algorithmes de l'addition en base dix puis dans d'autres bases<br>De même pour la soustraction<br>Liens entre les algorithmes et les représentations des nombres                                            | Sondage : additions et soustractions posées en base dix puis dans d'autres bases                                                                                                            |
| 11           | Grands nombres<br>Multiplication et ses algorithmes en base dix puis dans d'autres bases (algorithme classique, per gelosia, algorithme classique non réduit)<br>Lien avec les opérations sur les polynômes | Trouver les erreurs et donner une explication dans deux algorithmes de multiplications incorrects                                                                                           |
| 12           | La division en base dix et son algorithme classique et l'algorithme classique non réduit                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                             |



Tableau 3 : Déroulement du cours pendant l'innovation pédagogique – année 2017

| Cours (2017) | Ce que propose le formateur                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | Tâches et sondages proposés aux étudiants pendant les cours                                                                                                                                                                             |
|--------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 4            | Identique au cours 4 donné en 2016                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                         |
| 5            | Identique au cours 8 donné en 2016                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                         |
| 6            | Identique au cours 9 donné en 2016                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                                                                                                                                                                                                                                         |
| 7            | Systèmes de numérations et représentations des nombres en base trois, dix et treize                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | Tâches de numération en base dix puis en base trois et treize : à partir d'une collection de confettis représentés par des points, trouver combien il y a de confettis. Écrire le nombre en représentation symbolique dans chaque base. |
| 8            | 1. Passage de la base trois à la base neuf par groupement et dégroupement avec le matériel (boîtes avec des billes, Figure 13) effectué par le formateur, puis sur des fiches (Figure 14)                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 2. Donner l'écriture d'un nombre en base trois en base neuf et inversement en utilisant les fiches (Figure 14)                                                                                                                          |
| 9            | Passage de l'écriture en base huit à l'écriture en base quatre avec l'abaque (Figure 15) et les fiches (Figure 16)<br>Démonstration avec les billes, puis les étudiants complètent les fiches, suivi d'une correction par le formateur (tâche : échanges par groupement ou dégroupement)<br>De même pour le passage de l'écriture en base huit à l'écriture en base quatre en passant par l'écriture en base deux<br>Mathématiques et musique (fractions)<br>Multiplication par 10 en base trois<br>Division par 10 en base dix<br>Division par 10 en base trois, écriture périodique du nombre, nombre rationnel (écriture fractionnaire, code à virgule)<br>Lien entre fraction avec dénominateur puissance de la base et code à virgule<br>Passage de l'écriture d'un nombre rationnel (non entier) en base huit à la base quatre | Soit le nombre 235 en base huit, l'écrire en base quatre<br>Soit le nombre 235 en base huit, l'écrire en base quatre en passant par la base deux (annexe 1)<br>Soit le nombre 23,5 en base huit, l'écrire en base quatre (annexe 1)     |
| 10           | Addition en base dix, puis en base huit<br>Algorithmes et calcul réfléchi<br>Soustraction en base dix, puis en base trois, manipulation en base trois<br>Algorithmes et calcul réfléchi                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | Effectuer des additions et soustractions dans des bases autres que dix sur des fiches analogues à celle présentée dans l'annexe 2                                                                                                       |
| 11           | 1. Multiplication, procédures automatisées en base dix par un chiffre ( $234 \times 3$ ) puis par deux chiffres ( $253 \times 64$ )<br>2. Multiplication ( $253 \times 64$ ) sur l'abaque (figure 15)<br>3. Une correction de $253 \times 64$ avec les fiches (analogues à celles de la figure 16)<br>4. Multiplication $253 \times 64$ en base huit sur l'abaque (figure 15)<br>5. Une correction de $253 \times 64$ avec ces fiches<br>6. Lien avec la multiplication per gelosia                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 2. Effectuer $253 \times 64$ en base dix sur les fiches (analogues à celles de la figure 16)<br>4. Effectuer $253 \times 64$ en base huit sur les fiches (analogues à celles de la figure 16)                                           |
| 12           | 1. Division, procédures automatisées en base dix ( $624$ divisé par 7)<br>2. Division de $2321$ par 7 sur l'abaque en base dix<br>3. Une correction des fiches est proposée par le formateur<br>4. Division de $2321$ par 7 en base quatre ( $2321$ divisé par 13)<br>5. Le formateur propose une correction                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 2. Effectuer $2321$ divisé par 7 sur des fiches en base dix (analogues à celles de la figure 16 mais avec une seule rangée)<br>4. De même en base quatre                                                                                |



Lors de ce cours, les formateurs proposent des séances de réponses aux questions et ils ont pu observer que les procédures mises en œuvre par les étudiants en difficultés pour résoudre les tâches demandées restaient principalement algorithmiques, ceci malgré la présence de ces représentations intermédiaires. En se ramenant autant que possible à des procédures algorithmiques, les étudiants tentent d'échapper à ce pas de côté voulu en utilisant d'autres bases que la base dix et ainsi ils continuent de percevoir les mathématiques comme une suite de recettes à appliquer à bon escient. Beaucoup d'étudiants n'utilisaient que la représentation symbolique et utilisaient des algorithmes pour traduire les consignes en bases dix, effectuer les opérations en base dix avant de traduire les réponses dans la base demandée, ce qui ne correspond absolument pas aux objectifs de ce cours. Nous avons donc proposé un nouveau dispositif qui pallie à ces procédures d'étudiants que nous voulons éviter.

### **Présentation du nouveau dispositif**

Le tableau ci-dessous illustre le déroulement du cours sur les différentes numérations et les algorithmes de la multiplication en détaillant les tâches et sondages proposés aux étudiants. Comme pour les années précédentes, nous avons proposé des pré-tests et post-tests avant et après chaque chapitre, ainsi que des fiches d'exercices.

La comparaison des tableaux 2 et 3 montre que l'ordre des cours a été modifié, mais pas les contenus autres que ceux sur lesquels porte le nouveau dispositif. Les tâches avec le matériel construit (Figures 13 à 16) ont été utilisées lors des cours 8, 9, 11 et 12 en 2017. Lors de ces cours, les étudiants ont dû effectuer des tâches en lien avec ces manipulations, ce qui n'était pas le cas en 2016.

Nous présentons une partie de ce matériel et des tâches construites avec celui-ci dans le cadre des numérations, de la multiplication et de ses algorithmes. Ce matériel vise à permettre aux étudiants de prendre note et de participer depuis leur banc aux manipulations proposées devant l'auditoire par le formateur.

Nous pouvons toutefois signaler que nous avons toujours souhaité permettre aux étudiants d'effectuer des manipulations pour la partie sur les numérations et les outils de calculs, mais ils se sont longtemps arrêtés devant l'obstacle de l'impossibilité d'avoir suffisamment de matériel pour permettre à chaque étudiant d'effectuer ses propres manipulations. Nous avons donc proposé un nouveau dispositif qui prend en compte ces contraintes du nombre d'étudiants et du peu de matériel disponible.

Dans le nouveau dispositif, un diaporama avec des animations qui relient les représentations symboliques et analogiques est toujours présenté aux étudiants, mais il est accompagné par des manipulations filmées et projetées en direct pour que tous les étudiants puissent les voir. Ces manipulations se font avec du matériel qui peut être associé à la représentation analogique. En suivant les manipulations du formateur, les étudiants vont, à l'aide de fiches





distribuées préalablement (Figures 11 et 13), essayer par eux-mêmes de représenter ces manipulations. Par la suite, le formateur propose au rétroprojecteur une utilisation possible de ces fiches. Les objectifs de formation sont multiples : les étudiants ont une posture active pendant le cours, ils s'approprient ce qui est présenté en essayant de le représenter. De plus, les fiches permettent de faire les liens entre les représentations analogiques et symboliques et constituent une trace des manipulations auxquelles ils ont assisté. Elles représentent également un support intermédiaire qui permet de faire les liens entre les représentations analogiques, les manipulations d'objets concrets et les représentations symboliques utilisées plus couramment.

Par exemple, pour illustrer qu'il est possible de passer d'une représentation symbolique en base trois à une en base neuf ou d'une en base neuf à une en base trois sans passer par la base dix<sup>3</sup>, des billes et des boîtes produites à l'aide d'une imprimante 3D ont été utilisées par le formateur devant les étudiants comme le montre la figure suivante :

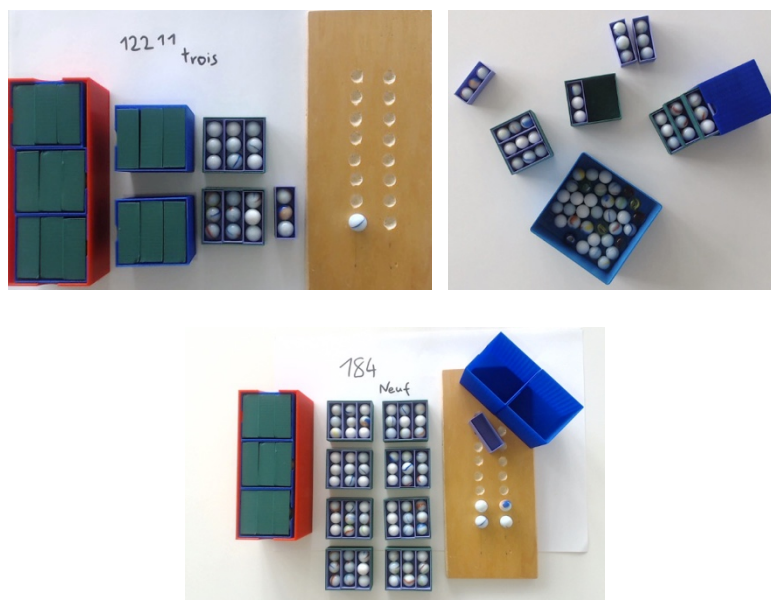


Figure 10 : Matériel utilisé par le formateur pendant le cours 8 - année 2017

Concrètement, le formateur prend un paquet de billes (dans la boîte du bas sur l'image du milieu de la Figure 10), effectue des groupements de 3 billes et remplit les petites boîtes de 3 billes. Puis, lorsque les 3 boîtes de 3 billes sont pleines, il les place dans une boîte de 9 et ainsi de suite. Le matériel a été conçu pour rendre possible l'emboîtement des différentes boîtes sans trop de difficultés. Ces manipulations sont filmées et projetées aux étudiants, ce qui permet à tout l'auditoire de bien les voir. Ces manipulations sont relativement longues à effectuer, mais ont pour intérêt de laisser du temps aux étudiants pour compléter les fiches (Figure 11) qui correspondent pour les étudiants à des manipulations différentes mais analogues à celles effectuées par le formateur.

3. Pour plus de détails, voir les actes de 44<sup>e</sup> Colloque de la COPIRELEM (Deruaz & Batteau, 2017).

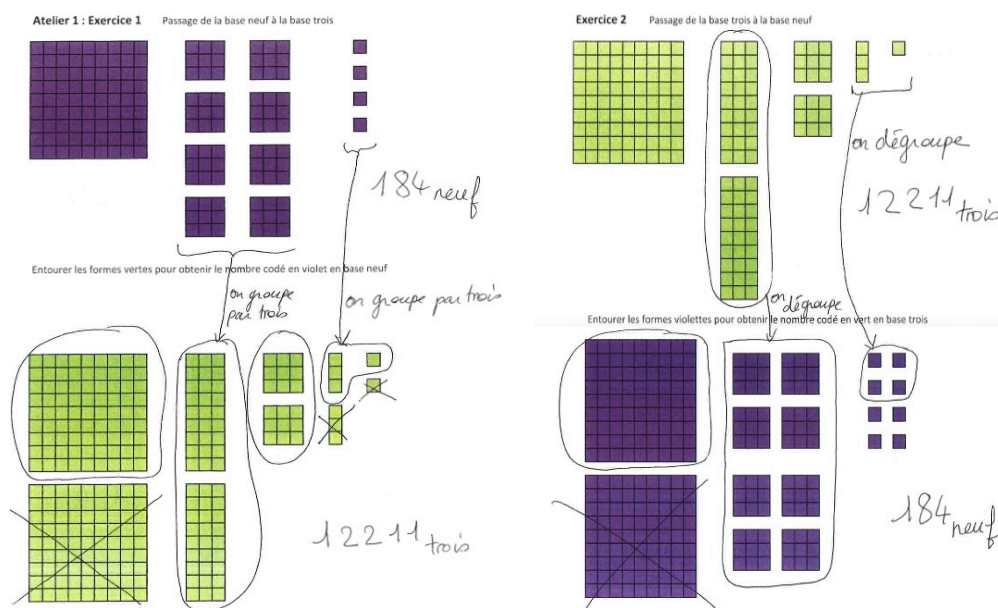
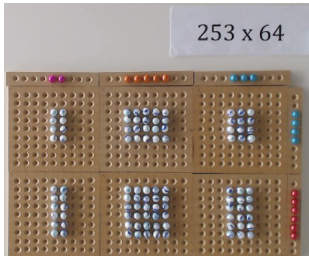
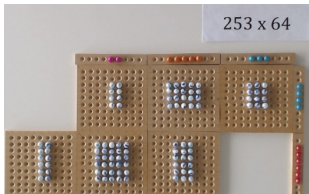
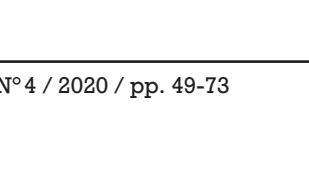


Figure 11 : Matériel utilisé par les étudiants pendant le cours

Pour la partie concernant la compréhension de l'algorithme de la multiplication posée, un abaque a été mis au point. Il permet d'effectuer n'importe quelle multiplication quelle que soit la base. Nous décrivons ci-dessous la procédure pour effectuer, en base dix, la multiplication 253 64 :

| Ce qui est montré par le formateur                                                  |  | Ce qui est donné comme explications orales                                                                                                                                                                                                              |  |
|-------------------------------------------------------------------------------------|--|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|
|  |  | Pour effectuer la multiplication 253 64 on pose le 253 en entête de colonnes de notre abaque et le 64 en posant le 4 sur la première ligne et le 6 sur la seconde.                                                                                      |  |
|  |  | On place les unités (ici 4) sur la 1 <sup>re</sup> ligne pour correspondre à l'ordre dans lequel on effectue l'algorithme classique de la multiplication.                                                                                               |  |
|  |  | On place les unités (ici 6) sur la 1 <sup>re</sup> ligne pour correspondre à l'ordre dans lequel on effectue l'algorithme classique de la multiplication.                                                                                               |  |
|  |  | On complète alors les différentes cases de l'abaque en respectant les règles de l'abaque. Cela permet d'éviter de se référer au répertoire mémorisé des tables de multiplication en auditif-verbal.                                                     |  |
|  |  | Lorsque l'on a complété la seconde ligne, on l'a fait comme pour une multiplication par 6 alors que l'on on l'a fait comme pour une multiplication par 6 alors que l'on multiplie par 6x10. Il faut donc décaler les colonnes d'un cran vers la gauche. |  |



Lorsque l'on a complété la seconde ligne,  
Lorsque l'on a complété la seconde ligne,  
on l'a fait comme pour une multiplication  
on l'a fait comme pour une multiplication  
par 6 alors que l'on multiplie par  $6 \times 10$ . Il  
par 6 alors que l'on multiplie par  $6 \times 10$ . Il  
faut donc décaler les colonnes d'un cran  
faut donc décaler les colonnes d'un cran

vers la gauche  
vers la gauche

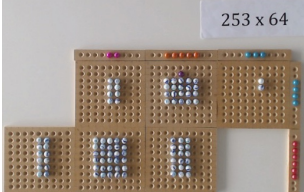
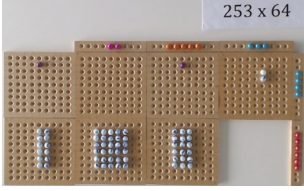
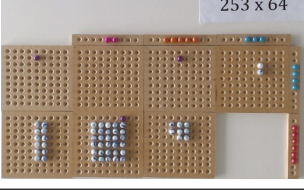
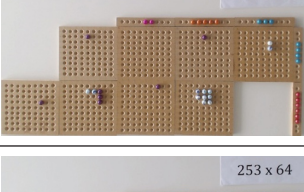
|                                                                                     |                                                                                                                                                                                 |
|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|    | <p>Comme on travaille en base dix, on fait des groupements de dix billes à chaque fois que c'est possible et on ajoute un élément par groupement dans la colonne de gauche.</p> |
|    | <p>Le nombre 1612 correspond au résultat de la multiplication de 253 par 4.<br/>Le nombre 1012 correspond au résultat de la multiplication de 253 par 6.</p>                    |
|    | <p>On effectue, pour la seconde ligne de l'abaque le même type de regroupements par dix à chaque fois que c'est possible.</p>                                                   |
|   | <p>Le nombre 1518 correspond au résultat de la multiplication de 253 par 6.</p>                                                                                                 |
|  | <p>On additionne les résultats obtenus sur chaque ligne. Le nombre 16192 correspond bien au résultat de la multiplication de 253 par 64.</p>                                    |

Figure 12 : Dispositif de formation

Lorsque le formateur effectue la multiplication de 253 par 64 (Figure 12), il commence par poser les billes une par une puis il explique tout de suite qu'on peut utiliser ses mains ou une règle pour délimiter l'espace rectangulaire de l'abaque qu'il faut remplir de billes, afin d'être plus rapide.

Avec cet abaque, la retenue dans une multiplication est devenue «matérialisée», elle représente un groupement de dix billes ou une poignée de dix billes. On peut noter que, si une autre base que la base dix est utilisée, les groupements se feront par cette base au lieu de se faire par dix. Ce matériel permet donc d'effectuer des multiplications dans d'autres bases que la base dix sans passer par la base dix, ce qui était un des objectifs du dispositif. Ainsi pendant le cours 11, le formateur effectue la multiplication en base dix avec ce matériel sous un vidéoprojecteur qui permet à l'ensemble de l'auditoire de suivre les manipulations. En même temps, il commente chaque étape avec les explications données à l'oral (Figure 12). En même temps, le formateur affiche un diaporama qui illustre avec les tableaux de nombres cette même multiplication (comme dans la Figure 8). En même temps, pour accompagner ce matériel auprès des étudiants pendant le cours, les fiches suivantes leur ont été proposées pour effectuer cette même multiplication de 253 par 64.



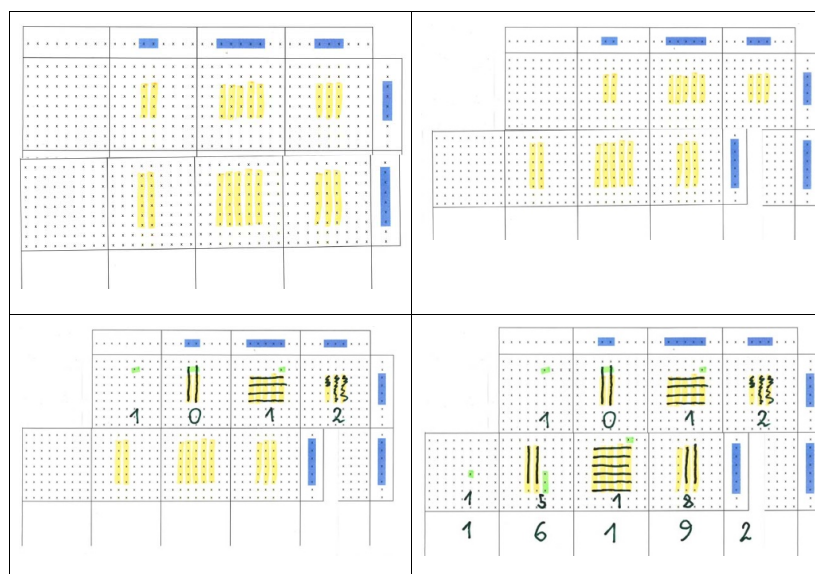


Figure 13: Matériel utilisé par les étudiants pour multiplier pendant le cours

Le dispositif mis en œuvre combine une participation active des étudiants et de la manipulation de matériel par le formateur pendant les cours donnés en grand effectif. Comme nous l'avons vu pour la multiplication posée, les Figures 7 et 8 correspondent à ce qui se trouve dans le diaporama utilisé par le formateur pendant le cours, la Figure 12 à ce que le formateur montre en manipulant des billes sur un abaque et la Figure 13 à ce qui est produit par les étudiants pendant qu'ils suivent le cours.

## Conclusion et perspectives

Le nouveau dispositif de formation mis en œuvre à partir de 2017 fonctionne en processus (Lison *et al.*, 2014). En effet, celui-ci est limité dans le temps de l'année universitaire, avec sa préparation, sa mise en œuvre par le formateur, son déroulement exposé dans ce texte, une évaluation de la part des étudiants dans le cadre des évaluations des modules de formation par le Centre de soutien à l'enseignement de la HEP Vaud. Ce dispositif est récurrent car, il a été repris et amélioré depuis 2017. Par ailleurs, sa finalité est l'amélioration des apprentissages des étudiants. Comme nous l'avons vu, ce dispositif se distingue d'un enseignement magistral ou frontal et donc correspond bien à une innovation pédagogique au sens de (Béchar, 2001 ; Lison *et al.*, 2014). Tout en observant les manipulations du formateur, les étudiants font à leur tour des manipulations sur un autre média. Ce dispositif de formation permet aux étudiants d'être actifs pendant les séances de cours et lorsque c'est possible de manipuler des objets concrets pour faire des liens avec les objets mathématiques qu'ils représentent.

L'innovation pédagogique a été mise en œuvre en 2017 et améliorée en 2018. Un matériel analogue à celui qui a été utilisé pour effectuer les algorithmes de la multiplication et de la division (fiches et abaques avec des billes) a notamment été construit pour les algorithmes de l'addition et de la soustraction.



Ce dispositif semble avoir eu des effets sur les résultats des étudiants sur l'ensemble des questions de l'examen : nous relevons que le taux de réussite à la première session d'examen est passé de presque 80% en 2016 à 90% en 2017, l'année de l'innovation.

Par ailleurs, ce dispositif semble aussi impacter le rapport aux mathématiques des étudiants. Davantage d'étudiants que les années précédentes choisissent de réaliser leur mémoire professionnel de fin d'études en mathématiques et en didactique des mathématiques : 7% des étudiants en 2016 et 19% des étudiants en 2017. Pour terminer, la fréquentation des cours par les étudiants est restée constante jusqu'à la fin du semestre alors que, les années précédentes, il y avait une baisse de fréquentation lors des derniers cours. Nous voyons donc que l'innovation pédagogique semble remplir tant les critères de produit concernant la réussite des étudiants que de processus par un engagement et la persévérance des étudiants.

Par ailleurs, les formateurs font l'hypothèse que, si les étudiants rencontrent ce type d'ingénieries en formation, les étudiants oseront plus facilement mettre en œuvre plus tard dans leurs classes avec leurs élèves des dispositifs qui intègrent des manipulations et de l'expérimentation. Ainsi, cette innovation pédagogique peut se situer à deux niveaux : au niveau de la formation des enseignants, avec un changement de pratiques du formateur et des étudiants en cours, et au niveau de la classe, avec une potentielle transposition du dispositif qui implique un changement de pratiques des étudiants-stagiaires avec leurs élèves.

Une limite de la mise en œuvre du dispositif concerne le fait que nous avons postulé qu'en faisant participer davantage les étudiants pendant le cours et en leur proposant des activités de manipulations, cela leur permettrait de mieux comprendre les systèmes de numération et de faire des liens entre numérations et algorithme de la multiplication.

Nos données ne nous permettent pas d'affirmer que tous les étudiants ont mieux compris les systèmes de numération et l'algorithme de la multiplication grâce à l'innovation proposée. En revanche, les résultats des étudiants aux tests mis à disposition lors des chapitres sur les numérations et les opérations et leurs algorithmes nous permettent d'affirmer que le dispositif a pour effet *a minima* que les étudiants prennent conscience que l'on regroupe par dix en base dix et plus généralement par  $n$  en base  $n$  et que l'on utilise cela dans les algorithmes des opérations. Autrement dit, les étudiants ont *a minima* fait un lien entre la signification des groupements dans le système de numération et dans les algorithmes des opérations.

Toutefois, certains étudiants montrent une résistance, car ce dispositif les place dans une position active pendant les cours, ce qui est inhabituel dans un cours magistral de mathématiques. En particulier, pour des étudiants qui se sentent en difficulté en mathématiques, un changement de dispositif peut les déstabiliser et augmenter leur sentiment d'insécurité par rapport aux mathématiques.



L'innovation pédagogique pourrait être remise en cause suite à une modification des dimensions organisationnelle ou technique. En effet, l'innovation a été élaborée pour répondre à des contraintes organisationnelles et à des objectifs didactiques, et sa mise en œuvre est dépendante de l'offre technique riche mise à disposition par l'institution. Si celle-ci devait disparaître ou être réduite, le dispositif serait remis en cause.

Pour la suite, nous envisageons plusieurs pistes de développement de cette recherche dont notamment deux perspectives à court terme. La première porte sur une transposition en classe du dispositif intégrant le matériel présenté dans cet article pour la multiplication et uniquement en base dix. Des premières expérimentations de la mise en œuvre de ce matériel construit pour la multiplication sont en cours de réalisation en classe, sous forme de recherche-action dans le cadre d'un mémoire professionnel (Brandt & Girard, 2018) et dans le cadre de l'enseignement ordinaire par une formatrice de l'UER Mathématiques et Sciences de la HEP (Batteau, Deruaz & Balegno, 2019; Deruaz, Balegno & Batteau, 2018). Dans les deux cas, les élèves ont directement manipulé des billes sur des abaques. Les fiches mises à disposition des étudiants en formation ont été utilisées par les élèves comme des intermédiaires entre les manipulations sur l'abaque et la multiplication posée classiquement en colonnes sur une feuille. Comme pour les étudiants en formation au métier d'enseignant, nous faisons l'hypothèse que pour les élèves, introduire différents artefacts qui se réfèrent à différents registres va faciliter l'apprentissage. Pour éviter que certains élèves utilisent ces artefacts de manière automatisée sans donner du sens, il faudra concevoir une ingénierie adaptée qui permette de travailler sur les liens entre les différents artefacts et les différents registres.

Comme le taux de réussite à l'examen a augmenté, une deuxième perspective serait de mettre en place un dispositif de recherche qui permette de comparer les procédures utilisées par les étudiants sur quelques tâches de numération et de multiplication, ainsi que les résultats obtenus sur ces tâches pour s'assurer qu'il y ait un lien entre cette réussite améliorée et les manipulations proposées aux étudiants dans le cadre de cette innovation pédagogique. Dans une recherche portant également sur la formation initiale, Nikolantonakis et Vivier (2013) ont présenté la numération dans une base autre que dix. Il serait intéressant d'effectuer des comparaisons entre ces recherches effectuées dans différents pays.





## Références

- Anselmo, B. et Zucchetta, H. (2013). Du comptage à la numération. Une formation sur l'enseignement de la numération. *Grand N*, 91, 71-91.
- Ball, D. L., Thames, M.H. et Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407. doi:10.1177/0022487108324554.
- Batteau, V. et Clivaz, S. (2016). Le dispositif de leçon study : travail autour d'une leçon de numération. *Grand N*, 98, 27-48. Repéré à <http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique21&num=98>
- Batteau, V., Deruaz, M. et Balegno, M. (2019). A study of an artefact with marbles, boards and, forms on pupils' errors in the algorithm of multiplication. Dans M. Graven, H. Venkat, A.A. Essien et P. Vale (dir.), *Proceedings of the 43<sup>rd</sup> Conference of the international group for the psychology of mathematics education* (vol. 4, p. 123). Pretoria. Repéré à <https://www.up.ac.za/pme43>
- Bécharde, J.-P. (2001). L'enseignement supérieur et les innovations pédagogiques : une recension des écrits. *Revue des sciences de l'éducation*, 27(2), 257-281.
- Bédard, D. et Bécharde, J.-P. (2009). *Innover dans l'enseignement supérieur*. Paris : Presses Universitaires de France. doi:10.3917/puf.bedar.2009.01.
- Bédard, D. et Raucourt, B. (2015). Les innovations pédagogiques en enseignement supérieur : pédagogies actives en présentiel et à distance. *Revue internationale de pédagogie de l'enseignement supérieur*, 31(1), 1-4.
- Bednarz, N. et Janvier, B. (1984). La numération : les difficultés suscitées par son apprentissage. *Grand N*, 33, 5-31.
- Brandt, J. et Girard, M. (2018). *L'abaque, un artefact pour faciliter l'apprentissage de la multiplication ?* (mémoire de bachelor primaire). HEP Vaud, Lausanne.
- Chambris, C. (2018). The influence of theoretical mathematical foundations on teaching and learning: a case study of whole numbers in elementary school. *Educational studies in mathematics*, 97(2), 185-207.
- Clivaz, S. (2014). *Des mathématiques pour enseigner ? Quelle influence les connaissances mathématiques des enseignants ont-elles sur leur enseignement à l'école primaire ?* Grenoble : La pensée sauvage.
- Clivaz, S. et Deruaz, M. (2013). Des mathématiques à leur enseignement, l'algorithme de la multiplication. *Grand N*, 92, 15-23.
- Cros, F. (2000). L'innovation en formation. Considérations épistémologiques et historiques. *Actualité de la formation permanente*, 166, 45-49.
- Cros, F. (2009). Préface. Dans D. Bédard et J.-P. Bécharde (dir.), *Innover dans l'enseignement supérieur* (p. 11-17). Paris : Presses Universitaires de France.
- Dehaene, S. (1992). Varieties of numerical abilities. *Cognition*, 44, 1-42.
- Deruaz, M. (2015). Un dispositif pour évaluer des savoirs mathématiques au début, pendant et à la fin d'un module de formation. Dans J.-G. Blais, J.-L. Gilles et A. Tristan (dir.), *Bienvenue au 21<sup>e</sup> siècle. Évaluation des apprentissages et technologies de l'information et de la communication* (p. 77-111). Berne : Peter Lang.
- Deruaz, M., Balegno, M. et Batteau, V. (2018). *La multiplication posée en formation des enseignants*. Communication présentée à Espace Mathématique Francophone (EMF), Cergy-Pontoise.
- Deruaz, M. et Batteau, V. (2017, 13 au 15 juin). Dix ou 10 : quelle est la question ? Dans ARPEME (dir.), *44<sup>e</sup> Colloque de la COPIRELEM, Manipuler, représenter, communiquer : quelle est la place de la sémiotique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques ?* (p. 231-255). Epinal. Repéré à [http://www.arpeme.fr/index.php?id\\_page=25](http://www.arpeme.fr/index.php?id_page=25)
- Deruaz, M. et Bünzli, L.-O. (2015). L'utilisation des degrés de certitude comme outil de professionnalisation en formation des maîtres du premier degré. Dans L. Theis (dir.), *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage. Actes du colloque EMF 2015 – GT1*, (p. 95-107). Alger, Algérie. Repéré à <http://emf.unige.ch/emf-2015/>
- Deruaz, M. et Clivaz, S. (2012). *Un cours de savoirs disciplinaires en mathématiques en formation des maîtres primaires*. Communication présentée à EMF 2012, Genève, Suisse.
- Deruaz, M. et Clivaz, S. (2018). *Des mathématiques pour enseigner à l'école primaire*. Lausanne, Suisse : Presses polytechniques et universitaires romandes.
- Houdement, C. et Tempier, F. (2018). Understanding place value with numeration units. *ZDM*, 51, 25-37. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0985-6>.
- Lison, C., Bédard, D., Beaucher, C. et Trudelle, D. (2014). De l'innovation à un modèle de dynamique innovationnelle en enseignement supérieur. *Revue internationale de pédagogie de l'enseignement supérieur*, 30(1), 1-20. Repéré à <http://ripes.revues.org/771>



- Mounier, É. (2012). Des modèles pour les numérations orales indoeuropéennes à usage didactique. Application à la numération parlée en France. *ADSC*, 17, 27-58.
- Nikolantonakis, K. et Vivier, L. (2013). Positions numeration in any base for future Elementary school teachers in France and Greece: one discussion via Registers and Praxis. *MENON: Journal of educational research*, 2a, 99-114
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 15(2), 4-14. Repéré à <http://edr.sagepub.com/cgi/reprint/15/2/4>
- Tempier, F. (2016). Composer et décomposer: un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves. *Grand N*, 98, 67-90. Repéré à <http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique21&num=98>
- Tempier, F. et Chambris, C. (2017). Concevoir une ressource pour l'enseignement de la numération décimale de position. *Recherches en didactique des mathématiques*, 37(2-3), 289-332. Repéré à <https://revue-rdm.com/2017/concevoir-une-ressource-pour-l/>



## Annexe 1

Voici deux tâches proposées aux étudiants pendant le cours 9 en 2017.

Soit le nombre 235 en base huit, l'écrire en base quatre en passant par la base deux.

|        |  |    |    |    |   |   |   |
|--------|--|----|----|----|---|---|---|
| Huit   |  |    |    |    |   |   |   |
|        |  | 64 |    | 8  |   | 1 |   |
|        |  | 2  |    | 3  |   | 5 |   |
| Deux   |  |    |    |    |   |   |   |
|        |  | 64 | 32 | 16 | 8 | 4 | 2 |
|        |  |    |    |    |   |   | 1 |
| Quatre |  |    |    |    |   |   |   |
|        |  | 64 |    | 16 |   | 4 |   |
|        |  |    |    |    |   |   | 1 |

De même avec le nombre 23,5 en base huit, l'écrire en base quatre en passant par la base deux.

|        |  |    |   |   |   |     |      |
|--------|--|----|---|---|---|-----|------|
| Huit   |  |    |   |   |   |     |      |
|        |  | 8  |   | 1 |   | 1/8 |      |
|        |  | 2  |   | 3 |   | 5   |      |
| Deux   |  |    |   |   |   |     |      |
|        |  | 16 | 8 | 4 | 2 | 1   | 1/2  |
|        |  |    |   |   |   | 1/4 | 1/8  |
|        |  |    |   |   |   |     | 1/16 |
| Quatre |  |    |   |   |   |     |      |
|        |  | 16 |   | 4 |   | 1   |      |
|        |  |    |   |   |   | 1/4 | 1/16 |

## Annexe 2

Exemple d'une tâche proposée pendant le cours 10 en 2017 sur l'addition de  $1222+2212$  en base trois.

$$\begin{array}{r} 1222 \\ + 2212 \\ \hline \end{array}$$

